Cut elimination を中心とした証明論入門

新井　敏康（神戸大学自然科学研究科）

2006年8月31日-9月2日

概 要

1　古典述語論理の論理計算（式計算）

1.1　言語

$\mathcal{L}$ を一階の述語論理の言語 (language) とする。論理結合子は $\{\vee, \wedge, \exists, \forall\}$ である。ここに、$\mathcal{L}$ の述語記号の集まり $\mathcal{R}$ は

$$\mathcal{R} = \{R_i, \bar{R}_i : i \in I\}(I\text{: a countable set})$$

を満たすとする。ここで、 R と $\bar{R}$ は互いに *complement* であり、

$$\bar{\bar{R}} := R$$

と定める。

literal とは、 atomic formula つまり $R(t_1, \ldots, t_n), \bar{R}(t_1, \ldots, t_n)$ のことである。

$A, B, C, \ldots$ で論理式 (formula) を表す。

論理式 A の否定 *negation* $\neg A$ は de Morgan's law と elimination of double negations により、次のように帰納的に定める：

1. $\neg L := \bar{L}$ for a literal L.

2. $\neg(A \vee B) := \neg A \wedge \neg B$ and $\neg(A \wedge B) := \neg A \vee \neg B$.

3. $\neg\exists x A(x) := \forall x \neg A(x)$ and $\neg\forall x A(x) := \exists x \neg A(x)$.

1.2 式計算 sequent calculus

論理式の有限集合 $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\}\,(n \geq 0)$ を *sequent* と呼ぶ。そのココロは disjunction $\bigvee_{i<n} A_i$ である。だから、the empty sequent は矛盾を表す。

Sequents は $\Gamma, \Delta, \ldots$ などで記す。sequents Γ, Δ と formula A について、Γ, Δ は union $\Gamma \cup \Delta$ を表し、 $\Gamma, A := \Gamma \cup \{A\}$ とする。

さてでは、一階古典述語論理の a one-sided sequent calculus $\boldsymbol{G}$ を導入しよう。

Axiom

$$\Gamma, \bar{L}, L$$

for any sequent Γ and a *literal* L.

Inference rules Rules for the propositional connectives $\vee, \wedge$:

$$\frac{\Gamma, A_0, A_1}{\Gamma}\ (\vee)\ (A_0 \vee A_1 \in \Gamma) \qquad \frac{\Gamma, A_0 \quad \Gamma, A_1}{\Gamma}\ (\wedge)\ (A_0 \wedge A_1 \in \Gamma)$$

Rules for the predicate logic:

$$\frac{\Gamma, A(t)}{\Gamma}\ (\exists)\ (\exists x A(x) \in \Gamma) \qquad \frac{\Gamma, A(y)}{\Gamma}\ (\forall)\ (\forall x A(x) \in \Gamma)$$

where, in $(\forall)$, the variable y does not occur freely in the *lowersequent* Γ, and is said to be the *eigenvariable*.

つぎの *cut* rule は $\boldsymbol{G}$ の inference rule ではない：

$$\frac{\Gamma, \neg C \quad C, \Delta}{\Gamma, \Delta}\ (cut)$$

where C is the *cut formula*.

証明（図） *proof* in $\boldsymbol{G}$ (or in $\boldsymbol{G}+(cut)$) は、sequents が labels として貼付けられた（有限の二分）木で、$\boldsymbol{G}$ ($\boldsymbol{G}+(cut)$) での上の **Axiom** と **inference rules** により帰納的に定義される。

Proposition 1.1 (健全性 Soundness)
Any provable sequent in $\boldsymbol{G}+(cut)$ is valid.

Definition 1.2 The *degree* $\mathrm{dg}(A)$ of a formula A.

1. $\mathrm{dg}(L) = 0$ for a literal L.

2. $\mathrm{dg}(A_0 \vee A_1) = \mathrm{dg}(A_0 \wedge A_1) = \max\{\mathrm{dg}(A_i) : i = 0, 1\} + 1$.

3. $\mathrm{dg}(\exists x A(x)) = \mathrm{dg}(\forall x A(x)) = \mathrm{dg}(A(x)) + 1$.

$\mathrm{dg}(\neg A) = \mathrm{dg}(A)$ に注意。

Definition 1.3 The set $Sbfml(A)$ of *subformulas* of a formula A (in Gentzen's sense) is defined as follows:

1. $Sbfml(L) = \{L\}$ for literals L.
2. $Sbfml(A) = \{A\} \cup \bigcup \{Sbfml(A_i) : i = 0, 1\}$ if $A \in \{A_0 \vee A_1, A_0 \wedge A_1\}$.
3. $Sbfml(A) = \{A\} \cup \bigcup \{Sbfml(B(t)) : t \text{ is a term}\}$ if $A \in \{\exists x B(x), \forall x B(x)\}$.

明らかに $B \in Sbfml(A) \Rightarrow dg(B) \leq dg(A)$.

Lemma 1.4 (Subformula property of cut-free proofs)
Any formula occurring in a cut-free proof (in $\boldsymbol{G}$) is a subformula of a formula occurring in the endsequent.

Definition 1.5 $\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma$ は、 Γ の証明でその tree-height が高々 α そして degree of any cut formmula が c より小さいようなのがあることを示す。
帰納的に $\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma$ を定義すると：

1. Γ が $\boldsymbol{G}$ **Axiom** のときは $\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma$ が任意の α and c で成立。
2. cut 以外の inference rule $\dfrac{\{\Gamma_i : i \in I\}}{\Gamma}$ について、$\forall i \in I[\vdash^{\beta}_{c} \Gamma_i \,\&\, \beta < \alpha] \Rightarrow \vdash^{\alpha}_{c} \Gamma$.
3. cut のときには、if $\vdash^{\beta}_{c} \Gamma, \neg C$ and $\vdash^{\beta}_{c} C, \Delta$ with $\beta < \alpha$ and $\mathrm{dg}(C) < c$, then $\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, \Delta$.

Lemma 1.6 (Weakening Lemma)
Assume $\beta \leq \alpha$ and $d \leq c$. Then

$$\vdash^{\beta}_{d} \Gamma \;\Rightarrow \vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, \Delta.$$

Proof. β に関する帰納法による。
P を Γ の証明とし、 P, Δ を tree obtained from P by appending Δ to each sequent in P とすれば P, Δ が求める証明にほぼなっている。ほぼ、とは rename eigenvariables to new ones not occurring freely in Δ が必要かもしれないから。 □

Exercise. Show that $\boldsymbol{G}$ proves the sequents $\neg A, A$ and the following formulas: $A_i \to A_0 \vee A_1\, (i = 0, 1), (A_0 \to B) \wedge (A_1 \to B) \to (A_0 \vee A_1 \to B)$, $A_0 \wedge A_1 \to A_i\, (i = 0, 1), A_0 \to A_1 \to A_0 \wedge A_1$ and $A(t) \to \exists x A(x)$, where $A \to B := \neg A \vee B$.

2 Cut-free fragment の完全性

2.1 Canonical proof search

ここでは次の補題を示す。

Lemma 2.1 (Completeness) *If* $\bigvee \Lambda$ *is valid, then* $\boldsymbol{G} \vdash \Lambda$.

但し validity は、「すべてのモデルで正しい」ではなく「Tarski's condition を満たすすべての truth assignments $M : A \mapsto M(A) \in \{\bot, \top\}$ のもとで正しい」であるが。

これと Proposition 1.1 (Soundness) により

Corollary 2.2 (Cut-elimination)

$$\boldsymbol{G} + (cut) \vdash \Lambda \Rightarrow \boldsymbol{G} \vdash \Lambda.$$

Exercise. the first order arithmetic PA が有限公理化不能であることを示せ（但し、PA の無矛盾性は仮定して）。すなわち、どんな PA の sentence A を取っても

$$\forall B[\mathrm{PA} \vdash B \Leftrightarrow \{A\} \vdash B] \tag{1}$$

とならない。
（解答）Lemma 1.4 (Subformula property of cut-free proofs) と partial truth definition, cf. [3] [1]によれ。

例えば $\Phi_n := \{A : \mathrm{dg}(A) \leq n\}$ として、各 n 毎に PA の formula Tr_n で Φ_n-formula の truth definition になるものが取れる。これは $A \in \Phi_n$ について、その gödel 数を $\lceil A \rceil$ として

$$\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow \mathrm{Tr}_n(\lceil A \rceil)$$

であるばかりでなく（Φ_n は否定と term の代入について閉じているから $\mathrm{Tr}_n \notin \Phi_n$ だけど）、Tarski's conditions も満たす、例えば $\circ$ が conjunction をつくる関数（記号）$\lceil A \rceil \circ \lceil B \rceil = \lceil A \wedge B \rceil$ として、$\phi_n = \{\lceil A \rceil : A \in \Phi_n\}$ について

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x, y[x \circ y \in \phi_n \to \{\mathrm{Tr}_n(x \circ y) \leftrightarrow \mathrm{Tr}_n(x) \wedge \mathrm{Tr}_n(y)\}]$$

等々。

$I\Phi_n$ を、PA で数学的帰納法 (12)[2]において formula $A \in \Phi_n$ と制限した theory とする。Cut elimination して partial truth definition を経て、どんな n についても $PA \vdash CON(I\Phi_n)$ (consistency statement for $I\Phi_n$).

[1]partial truth definition については [3] にたしか書いてあったと思う。しかしこんな基本的道具が書いてある教科書が見つからなかった。

[2]後出でした。

(1) を満たす A に対し、n を十分大きく取って $A \in \Phi_n \,\&\, I\Phi_n \vdash A$ とすれば $I\Phi_n \vdash CON(I\Phi_n)$ となってしまう。

Lemma 2.1 の証明

$\boldsymbol{G} \not\vdash \Lambda$ と仮定する。canonical proof search によりモデル M で Λ を反駁するものをつくりたい: $M \not\models \bigvee \Lambda$. [3]

アイデアは、(未だ作られていない) モデル M においてある sequent Γ が正しくないという事実を分析することにある。例えば、$\Gamma, A_0 \vee A_1$ が正しくないなら、それは $\Gamma, A_i\,(i=0,1)$ が共に正しくないということである。また $\Gamma, \forall x\, A(x)$ が正しくないなら、Γ が正しくないか、または $A(x)$ の反例があるはずである。後者の場合、その反例に名前を付けて (fresh な)y と呼ぶ。よって、$\Gamma, A(y)$ が正しくない、となる。

さて search tree の構成にとりかかる。terms 全部を一列に並べて $\{t_n : n \in \omega\}$ をとし、変数を一列に並べて $\{x_n : n \in \omega\}$ とする。

初めに与えられた sequent Λ を bottom node $\emptyset$ に置き、binary tree $\mathcal{T}$ を帰納的につくってゆく。各 node $\sigma \in \mathcal{T}$ は (構成の stage を表す) 3つのデータを labels として持つ：sequents $Seq_i(\sigma)\,(i=0,1)$ 二つ、 a linear ordering $Ord(\sigma)$ on $Seq_0(\sigma)$ そして a finite set $Term(\sigma; \exists x B(x))$ of terms for each existential formula $\exists x B(x)$.

ここで $Seq_0(\sigma)$ は non-literal formulas のみより成る。$Seq(\sigma) := Seq_0(\sigma) \cup Seq_1(\sigma)$ と置き、$Term(\sigma) : \exists x B(x) \mapsto Term(\sigma; \exists x B(x))$ とする。

stage σ において $Seq_0(\sigma)$ は未だ分析されていない formulas たちのことで、$Seq_1(\sigma)$ は分析済みの formulas たちである。また、terms t が $Term(\sigma; \exists x B(x))$ に入っているとは、既に $B(x)$ の x に t が代入されたことを示す。

一般に、sequent Γ について、$\Gamma = NL(\Gamma) \cup L(\Gamma)$ with the set $L(\Gamma)$ of literals in Γ and $NL(\Gamma) = \Gamma \setminus L(\Gamma)$.

初めは $Seq_0(\emptyset) = NL(\Lambda), Seq_1(\emptyset) = L(\Lambda), Term(\emptyset; \exists x B(x)) = \emptyset$. Fix an ordering $Ord(\emptyset)$ on $NL(\Lambda)$ arbitrarily.

tree $\mathcal{T}$ が node σ までつくられたとせよ。以下、$\Gamma_i = Seq_i(\sigma)$ と記す。

leaf condition σ が leaf になるのは、$Seq(\sigma)$ is an axiom in $\boldsymbol{G}$ のとき、と定める。

以下、σ は leaf でないとする。

もし、$\Gamma_0 = \emptyset$ ならば repeat, つまり $\sigma * (0) \in \mathcal{T}$, $Term(\sigma * (0)) = Term(\sigma)$, $Seq_0(\sigma * (0)) = Seq_0(\sigma) = \emptyset$, $Seq_1(\sigma * (0)) = Seq_1(\sigma)$ と定める：

$$\frac{;Seq_1(\sigma)}{;Seq_1(\sigma)}$$

[3] search method の応用・詳細については G. Kreisel, G. Mints and S. G. Simpson [4] が詳しい。

以下、$\Gamma_0 \neq \emptyset$ とし pick the first non-literal formula $B \in \Gamma_0$ in the ordering $Ord(\sigma)$.

B の形によって場合分けして、the next level を決める。

($\vee$) $B \equiv A_0 \vee A_1$: 先ず $\sigma * (0) \in \mathcal{T}$, $Term(\sigma * (0)) = Term(\sigma)$ とする。$\Delta_i = Seq_i(\sigma*(0))$ と書くことにして $\Delta_0 = (\Gamma_0 \cup NL(A_0, A_1)) \setminus \{A_0 \vee A_1\}$ and $\Delta_1 = \Gamma_1 \cup L(A_0, A_1) \cup \{A_0 \vee A_1\}$ とする。そして $Ord(\sigma * (0))$ on Δ_0 は、$NL(A_0, A_1)$ as last ones なる $Ord(\sigma)$ から induce される順序とする。

$$\begin{aligned} Ord(\sigma) &\ : \ A_0 \vee A_1, \ldots \\ Ord(\sigma * (0)) &\ : \ \ldots, NL(A_0, A_1) \end{aligned}$$

($\wedge$) $B \equiv A_0 \wedge A_1$: 先ず $\sigma * (n) \in \mathcal{T}$ $(n = 0, 1)$, $Term(\sigma*(n)) = Term(\sigma)$ とする。$\Delta_{ni} = Seq_i(\sigma*(n))$ と書くことにして $\Delta_{n0} = (\Gamma_0 \cup NL(A_n)) \setminus \{A_0 \wedge A_1\}$ and $\Delta_{n1} = \Gamma_1 \cup L(A_n) \cup \{A_0 \wedge A_1\}$ とする。そして $Ord(\sigma * (n))$ on Δ_{n0} は、$NL(A_n)$ as last one なる $Ord(\sigma)$ から induce される順序とする。

$L(A_0, A_1) = \emptyset$ として、以上を絵に描く：

$$\frac{\Psi, A_0, A_1; \Gamma_1, A_0 \vee A_1}{A_0 \vee A_1, \Psi; \Gamma_1} \quad \frac{\Psi, A_0; \Gamma_1, A_0 \wedge A_1 \qquad \Psi, A_1; \Gamma_1, A_0 \wedge A_1}{A_0 \wedge A_1, \Psi; \Gamma_1}$$

($\exists$) $B \equiv \exists x A(x)$: 先ず $\sigma * (0) \in \mathcal{T}$. t を the first term in the enumeration $\{t_n\}$ not in $Term(\sigma; B)$ と取っておく。$Term(\sigma * (0))$ は、$Term(\sigma * (0); B) = Term(\sigma; B) \cup \{t\}$, and $Term(\sigma * (0); C) = Term(\sigma; C)$ for $C \not\equiv B$ で定める。$\Delta_i = Seq_i(\sigma * (0))$ と書くことにして $\Delta_0 = \Gamma_0 \cup NL(A(t))$ and $\Delta_1 = \Gamma_1 \cup L(A(t))$.

$$\begin{aligned} Ord(\sigma) &\ : \ \exists x A(x), \ldots (= \Gamma_0) \\ Ord(\sigma * (0)) &\ : \ \ldots, NL(A(t)), \exists x A(x) (= \Delta_0) \end{aligned}$$

NB. ここのみ分析された principal formula $\exists x A(x)$ が $Seq_0(\sigma * (0))$ に残されていることに注意。なぜなら作成中のモデル M で $M \not\models \exists x A(x)$ と思っているんだから、どんな対象 t でも $M \not\models A(t)$ となっているはず、なっていないといけない。そのことをすべての対象 (terms) を一列に並べて、順に要求していく。sequents は有限だから一挙に無限個は調べられない。

或は、sequents Λ の証明可能性を調べているんなら、$\exists x A(x)$ の証拠になる t の可能性を順に調べている、とも思える。

($\forall$) $B \equiv \forall x A(x)$: 先ず $\sigma*(0) \in \mathcal{T}$, $Term(\sigma*(0)) = Term(\sigma)$. $\Delta_i = Seq_i(\sigma*(0))$ とし y を first variable in the enumeration $\{x_n\}$ not occurring in $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ と取っておく。で、 $\Delta_0 = (\Gamma_0 \cup NL(A(y))) \setminus \{\forall x A(x)\}$ and $\Delta_1 = \Gamma_1 \cup L(A(y)) \cup \{\forall x A(x)\}$. $Ord(\sigma * (0))$ on Δ_0 is the ordering induced by $Ord(\sigma)$ with the element in $NL(A(y))$ as last one.

$L(A(t)) = L(A(y)) = \emptyset$ として、以上を絵に描く：

$$\frac{\Psi, A(t), \exists x A(x); \Gamma_1}{\exists x A(x), \Psi; \Gamma_1} \quad \frac{\Psi, A(y); \Gamma_1, \forall x A(x)}{\forall x A(x), \Psi; \Gamma_1}$$

これで tree $\mathcal{T}$ の構成は終わった。すぐに分る事実：

$$\mathcal{T} \text{ is recursive.} \tag{2}$$

$$\sigma \subseteq \tau \in \mathcal{T} \Rightarrow Seq(\sigma) \subseteq Seq(\tau) \tag{3}$$

$$\frac{\{Seq(\sigma * (i)) : \sigma * (i) \in \mathcal{T}\}}{Seq(\sigma)} \text{ is a valid inference rule in } \boldsymbol{G} \tag{4}$$

Claim 2.3 *There exists an infinite path $\mathcal{P}$ through $\mathcal{T}$.*

Proof. もともと $\boldsymbol{G} \not\vdash \Lambda$ と仮定しているのだから、the tree is infinite. Thus there is an infinite path through $\mathcal{T}$ by weak König's lemma. □

Pick an infinite path $\mathcal{P}$ through $\mathcal{T}$. Let

$$Seq^+(\mathcal{P}) := \bigcup \{Seq(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}\} \tag{5}$$

Then

$$A_0 \vee A_1 \in Seq^+(\mathcal{P}) \Rightarrow \{A_0, A_1\} \subseteq Seq^+(\mathcal{P}) \tag{6}$$

$$A_0 \wedge A_1 \in Seq^+(\mathcal{P}) \Rightarrow \{A_0, A_1\} \cap Seq^+(\mathcal{P}) \neq \emptyset \tag{7}$$

$$\exists x A(x) \in Seq^+(\mathcal{P}) \Rightarrow \{A(t_n) : n \in \omega\} \subseteq Seq^+(\mathcal{P}) \tag{8}$$

$$\forall x A(x) \in Seq^+(\mathcal{P}) \Rightarrow \{A(x_n) : n \in \omega\} \cap Seq^+(\mathcal{P}) \neq \emptyset \tag{9}$$

$Seq(\sigma)\,(\sigma \in \mathcal{T})$ は **Axiom** に非ず：

$$\{\bar{L}, L\} \not\subseteq Seq^+(\mathcal{P}) \tag{10}$$

Let

$$Seq^-(\mathcal{P}) := \{\neg A : A \in Seq^+(\mathcal{P})\} \text{ and } Seq(\mathcal{P}) := Seq^+(\mathcal{P}) \cup Seq^-(\mathcal{P})$$

a truth valuation $M(A) \in \{\bot, \top\}$ for $A \in Seq(\mathcal{P})$ を以下で定義する：

$$M(A) := \begin{cases} \bot & \text{if } A \in Seq^+(\mathcal{P}) \\ \top & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

M is recursive in $\mathcal{P}$ に注意。

Claim 2.4 *1. $M(A) \neq M(\neg A)$ for $A \in Seq(\mathcal{P})$.*

2. M enjoys the Tarski's condition.

Proof. Show simultaneously by induction on $\mathrm{dg}(A)$ for $A \in Seq(\mathcal{P})$. 定義より $M(A) = \top \Rightarrow M(\neg A) = \bot$ だから、Claim 2.4.1 には $M(A) = M(\neg A) = \bot$ を反駁すればよい。

literal $L \equiv A$ については $\{\bar{L}, L\} \not\subseteq Seq^+(\mathcal{P})$ by (10). よって $M(L) \neq M(\bar{L})$ and $M(L) = \bot \Leftrightarrow M(\bar{L}) = \top$.

次に $A \equiv A_0 \vee A_1$ とする。$M(A) = M(\neg A) = \bot$ とすると、(6) and (7) よりある $i = 0, 1$ について $M(A_i) = M(\neg A_i) = \bot$ となってしまい IH(=Induction Hypothesis) に反す。これと (6), (7) より、$M(A) = \bot[\top] \Leftrightarrow M(A_0) = M(A_1) = \bot[M(A_0) = \top \vee M(A_1) = \top]$, resp.

最後に $A \equiv \exists x B(x)$ とせよ。$M(A) = M(\neg A) = \bot$ とすれば (8), (9) より、ある term t について $M(B(t)) = \bot$ となってしまい、IH に反す。これと (8), (9) から、$M(A) = \bot$ iff $M(B(t)) = \bot$ for any term t, and $M(A) = \top$ iff $M(B(t)) = \top$ for some t.

これで Claim 2.4 が示された。 □

Lemma 2.1 の証明を終わらせる。定義より $M(A) = \bot$ for any $A \in \Lambda = Seq(\emptyset) \subseteq Seq^+(\mathcal{P})$ 他方 Claim 2.4 により M が universe $\{t_n : n \in \omega\}$ のモデルを定めること、あるいは Tarski's condition を満たす truth assignment であることが分る。

Remark. Λ の counter model M を $M \models L :\Leftrightarrow L \notin Seq^+(\mathcal{P})$ for literals L によって定めることができる。この場合、ω-times jump operators により satisfaction relation $M \models A$ を by recursion on $\mathrm{dg}(A)$ で拡張することになり、relation $M \models A$ is not recursive in $\mathcal{P}$ となる。

2.2 Anchored

free-cut elimination とか anchored proof とかと呼ばれるものを導入する。

一般に *inference rule* とは、sequents Φ_i, Φ について組 $\langle\{\Phi_i(\vec{a}_i) : i \in I\}, \Phi\rangle$ (I : a finite set) のこととする。これは

$$\bigwedge_i \forall\vec{a}_i \Phi_i(\vec{a}_i) \rightarrow \bigwedge \Phi$$

のことで、推論図で書けば、適当な eigenvariable condition の下に substitution instances $\Phi'_i(\vec{a}_i)$, Φ' を使って

$$\frac{\{\Phi'_i(\vec{a}_i), \Gamma\}}{\Phi', \Gamma}$$

となる。

このような inference rules の集り T について applied logic calculus $\boldsymbol{G}+T$ での proofs が定まる。

Examples.

1. T を sentences の（可算）集合とする。theory T を考えるには $\boldsymbol{G}$ に次の inferences rules を付け加えた applied calculus:

$$\frac{\neg A, \Gamma}{\Gamma}\ (T)\ (A \in T)$$

2. 推移律 $x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$ を inference rule で書く方法はいろいろあるが、例えば

$$\frac{\Gamma, s = t \quad \Gamma, t = u}{\Gamma, s = u}$$

3. 数学的帰納法

$$\forall\vec{y}[A(0,\vec{y}) \wedge \forall x(A(x,\vec{y}) \rightarrow A(x+1,\vec{y})) \rightarrow \forall x A(x,\vec{y})] \qquad (12)$$

を inference rule で書けば、例えば eigenvariable a を伴って

$$\frac{\Gamma, A(0,\vec{s}) \quad \Gamma, A(a,\vec{s}) \rightarrow A(a+1,\vec{s})}{\Gamma, A(t,\vec{s})}$$

Definition 2.5 *1.* A formula occurrence A in a proof が *descendent* of another formula occurrence B iff $A \equiv B$ で A occurs below B で A, B 間のすべての sequent が formula A を含むこと。

2. A formula occurrence が *anchored* とは、それが a descendent of a formula occurrence in a principal formula(principal sequent?) Φ' of an extra inference rule in T.

3. A cut inference is *anchored* if either

(a) its cut formula is atomic and both of its cut formulas are anchored, or

(b) its cut formula is not atomic and one of its cut formulas is anchored.

4. A proof in $\boldsymbol{G}+T$ is *anchored* if any cut inference in it is anchored.

以下、簡単のため inference rule はすべて principal formulas $\Phi=\emptyset$ の場合のみ考える。$\langle\{\Phi_i(\vec{a}_i):i\in I\},\Phi\rangle$ または

$$\frac{\{\Phi'_i(\vec{a}_i),\Gamma\}}{\Phi',\Gamma}$$

はそれと同値な $\langle\{\Phi_i(\vec{a}_i)):i\in I\}\cup\{\neg\varphi:\varphi\in\Phi\},\emptyset\rangle$ または

$$\frac{\{\Phi'_i(\vec{a}_i),\Gamma\}\quad\{\neg\varphi':\varphi'\in\Phi',\Gamma\}}{\Gamma}$$

で置き換えればよい。

このとき anchored proof とは、cut-free のことにほかならない。

上の例でいえば

1. 推移律

$$\frac{\Gamma,s=t\quad\Gamma,t=u\quad s\neq u,\Gamma}{\Gamma}$$

2. 数学的帰納法

$$\frac{\Gamma,A(0,\vec{s})\quad\Gamma,\neg A(a,\vec{s}),A(a+1,\vec{s})\quad\Gamma,\neg A(t,\vec{s})}{\Gamma}$$

Lemma 2.6 *If Λ is provable in $\boldsymbol{G}+T+(cut)$, then there exists an anchored proof of Γ.*

Proof. principal formulas $\Phi=\emptyset$ として、cut elimination

$$\boldsymbol{G}+T+(cut)\vdash\Lambda\Rightarrow\boldsymbol{G}+T\vdash\Lambda$$

を示す。

Completeness Lemma 2.1 の証明と同様にして、$\boldsymbol{G}+T\not\vdash\Lambda$ の仮定のもとで proof search in $\boldsymbol{G}+T$ をする。その際、組織的に T の推論を試していく。

初めに T の推論の instances を一列に並べておく。tree $\mathcal{T}$ の構成で、例えば node σ の長さが偶数 $2n$ のときに、n 番目の instance $\langle\{\Phi_{ni}:i\in I\},\emptyset\rangle$ を $Seq(\sigma)$ に加える：各 $i\in I$ について $\sigma*(i)\in\mathcal{T}$, $Term(\sigma*(i))=Term(\sigma)$ で Φ_{ni} が non-literal として

$$\frac{\{Seq_0(\sigma),\Phi_{ni};Seq_1(\sigma)\}_{i\in I}}{Seq_0(\sigma);Seq_1(\sigma)}$$

□

3 Cut-elimination algorithm respecting proof sizes

ここでは cut-elimination を proof size の increase も考慮に入れながらするアルゴリズムを紹介する。

Lemma 3.1 (Inversion Lemma)

1. $\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, A_0 \wedge A_1 \Rightarrow \vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, A_i$ *for* $i = 0, 1$.

2. $\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, A(t)$ *for any term* t.

Proof. Lemma 3.1.2 を induction on α で示す。

$\Gamma, \forall x A(x)$ が **Axiom** なら $\Gamma, A(t)$ もそうであるなぜなら **Axiom** $\Gamma, \bar{L}, L$ の principal formula L は literal だから。

$\Gamma, \forall x A(x)$ をある推論図の lowersequent とする。$\forall x A(x)$ がその推論図の principal formula でなければ、IH(=Induction Hypothesis) でよい。例えば

$$\frac{\vdash^{\beta}_{c} \Lambda, \forall x A(x), \forall y B(y), B(z)}{\vdash^{\alpha}_{c} \Lambda, \forall x A(x), \forall y B(y)}\ (\forall)$$

for a $\beta < \alpha$, turns into another $(\forall)$

$$\frac{\vdash^{\beta}_{c} \Lambda, A(t), \forall y B(y), B(u)}{\vdash^{\alpha}_{c} \Lambda, A(t), \forall y B(y)}\ (\forall)$$

ここで必要なら rename the eigenvariable z.

$\forall x A(x)$ がその推論図の principal formula とする。

$$\frac{\vdash^{\beta}_{c} \Gamma, \forall x A(x), A(y)}{\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, \forall x A(x)}\ (\forall)$$

for a $\beta < \alpha$. IH より $\vdash^{\beta}_{c} \Gamma, A(t), A(y)$. y は t に occur していないとしてよいから、proof of $\Gamma, A(t), A(y)$ で y に t を代入して $\vdash^{\beta}_{c} \Gamma, A(t), A(t)$ となり、$\beta < \alpha$ だからよい。 $\square$

Definition 3.2 A formula is said to be an *A-formula*, if it is either a literal or a conjunction $A_0 \wedge A_1$ or a universal formula $\forall x B(x)$.

Lemma 3.3 C を $\mathrm{dg}(C) \leq c (< \omega)$ なる *A-formula* とすると

$$\vdash^{\alpha}_{c} \Gamma, C \;\&\; \vdash^{\beta}_{c} \neg C, \Delta \Rightarrow \vdash^{\alpha+\beta}_{c} \Gamma, \Delta.$$

Proof by induction on β.

初めに $\neg C, \Delta$ が **Axiom** であるとする。Δ が **Axiom** なら、Γ, Δ もそうなので、**Axiom** でないとすると、$\neg C$ が literal ということになり $\neg(\neg C) = C \in \Delta$. Weakening Lemma 1.6 with $\Gamma \cup \{C\} \subseteq \Gamma \cup \Delta$ で OK.

以下 $\neg C, \Delta$ はある推論図の lowersequent とする。$\neg C$ がその推論図の principal formula でなければ IH より OK となる。例えば

$$\dfrac{\vdash^\alpha_c \Gamma, C \qquad \dfrac{\vdash^\gamma_c \neg C, \Phi, \neg D \quad \vdash^\gamma_c D, \neg C, \Psi}{\vdash^\beta_c \neg C, \Phi, \Psi (= \neg C, \Delta)}\ (cut)}{\Gamma, \Delta}$$

for a $\gamma < \beta$ and $\mathrm{dg}(D) < c$ とすれば $\beta \mapsto \alpha + \beta$ is strictly increasing 故、IH より

$$\dfrac{\vdash^{\alpha+\gamma}_c \Gamma, \Phi, \neg D \quad \vdash^{\alpha+\gamma}_c D, \Gamma, \Psi}{\vdash^{\alpha+\beta}_c \Gamma, \Phi, \Psi (= \Gamma, \Delta)}\ (cut)$$

$\neg C$ がその推論図の principal formula であるとする。２通り $C \equiv A_0 \wedge A_1$ と $C \equiv \forall x A(x)$ の場合がある。後者とせよ。

$$\dfrac{\vdash^\alpha_c \Gamma, \forall x A(x) \qquad \dfrac{\vdash^\gamma_c \exists x \neg A(x), \Delta, \neg A(t)}{\vdash^\beta_c \exists x \neg A(x), \Delta}\ (\exists)}{\Gamma, \Delta}$$

for a $\gamma < \beta$. IH より $\vdash^{\alpha+\gamma}_c \Gamma, \Delta, \neg A(t)$. 他方 Inversion Lemma 3.1 から $\vdash^\alpha_c \Gamma, A(t)$ なので Weakening Lemma 1.6 して $\vdash^{\alpha+\gamma}_c \Gamma, A(t)$. $\mathrm{dg}(A(t)) < \mathrm{dg}(\forall x A(x)) \leq c$ に注意して

$$\dfrac{\vdash^{\alpha+\gamma}_c \Gamma, \Delta, \neg A(t) \quad \vdash^{\alpha+\gamma}_c \Gamma, A(t)}{\vdash^{\alpha+\beta}_c \Gamma, \Delta}\ (cut)$$

となる。 □

Lemma 3.4 $\vdash^\alpha_{c+1} \Gamma \Rightarrow \vdash^{2^\alpha}_c \Gamma$ *for* $c < \omega$.

Proof by induction on α.

$\alpha \mapsto 2^\alpha$ is strictly increasing だから Γ が (cut) の lowersequent のときのみ考えれば十分：

$$\dfrac{\vdash^\beta_{c+1} \Lambda, C \quad \vdash^\beta_{c+1} \neg C, \Delta}{\vdash^\alpha_{c+1} \Lambda, \Delta (= \Gamma)}$$

for an A-cut formula C with $\mathrm{dg}(C) < c + 1$ and a $\beta < \alpha$. IH, Lemma 3.3 and $2^\beta + 2^\beta \leq 2^\alpha$ により

$$\dfrac{\vdash^{2^\beta}_c \Lambda, C \quad \vdash^{2^\beta}_c \neg C, \Delta}{\vdash^{2^\alpha}_c \Lambda, \Delta (= \Gamma)}$$

□

順序数 α, β with $\beta \geq 2$ と $c < \omega$ について帰納的に $\beta_0(\alpha) := \alpha$ and $\beta_{c+1}(\alpha) := \beta^{\beta_c(\alpha)}$ と定める。Lemma 3.4 から次が分かる。

Theorem 3.5 (Cut-elimination theorem)
$\vdash_c^\alpha \Gamma \Rightarrow \vdash_0^{2_c(\alpha)} \Gamma$ *for* $c < \omega$.

Theorem 3.5 での algorithm eliminating cuts from a given proof P を説明してみよう。maximal degree c の cut formula の内で最も上にあるもののひとつを取り、Lemma 3.3 によって、その cut inference を lesser degrees$< c$ のに置き換える。いま $n_c(P)$ で degree c の P 中の cut inferences の個数を表すとして、この置き換えを $n_c(P)$-回繰り返して、a lesser degree の proof P_1 が得られる (cf. Lemma 3.4). ここで注意してほしいのは、$n_{c-1}(P_1)$ は $n_{c-1}(P)$ よりずっと大きくなるかもしれないこと。次に degree $c-1$ の cut inferences を取り除き、以下同様。

Lemma 3.3 の証明の algorithm はこんな感じ。先ず $\vdash_c^\alpha \Gamma, C$ の証明を up to the inferences in the proof of $\vdash_c^\beta \neg C, \Delta$ の証明中の principal formula が $\neg C$ である inferences まで持ち上げる。で、Inversion Lemma 3.1 により、the complement of the auxiliary formulas をつくり and cut it out of lesser degrees.

C が literal の場合は lift the proof of Γ, C up to the axioms in the proof of $\neg C, \Delta$.

こうして Γ, Δ の深さが高々 $\alpha + \beta$ の cut degree$< c$ の証明がつくれる。

Exercise.

Prove Anchored cut elimination by a similar algorithm respecting proof sizes: Lemma 2.6 と同様に inference rules の集まり T（但し principal formulas $\Phi \neq \emptyset$ あり）について

Theorem 3.6 (Anchored cut elimination)
If $\boldsymbol{G} + T + (cut) \vdash_c^\alpha \Gamma\, (c < \omega)$, *then there exists an anchored proof of* Γ *in* $\boldsymbol{G} + T + (cut)$ *whose depth is at most* $2_c(\alpha)$.

4 Herbrand の定理

Herbrand の定理はいろんな形がある。ここでは代表的と思われるもので述べるのにそんなに苦労しないのを紹介する。[2] も参照されるとよい。

簡単のためここでは言語は an individual constant を含むとする。

4.1 Existential formula

Definition 4.1 *1.* formula A の *Herbrand universe* とは、A に occur する individual constants と free variables （それらのどちらもが無

ければ an individual constant を取る）と A に occur する function symbols 上の terms 全体のこと。

2. A を *purely existential formula*,i.e., $A \equiv \exists\vec{x}R(\vec{x};\vec{a})$ with a quantifier-free R とする。このとき terms の列 $\vec{t^i}$ の列 $\{\vec{t^i} : i \leq r\}$ について $\bigvee\{R(\vec{t^i};\vec{a}) : i \leq r\}$ を A の *instance* と呼ぶ。

   さらに terms in $\{\vec{t^i} : i \leq r\}$ がすべて A の Herbrand universe に入っているときには、*H-instance* と呼ぶ。

3. quantifier-free formula において、各 atomic formula を互いに異なる命題変数だと思えば、命題論理の formula と見なせる。こうして quantifier-free formula が tautology であるとか、satisfiable であるとか言う。

Theorem 4.2 *purely existential formula* $A \equiv \exists\vec{x}R(\vec{x};\vec{a})$ について $\vdash A$ *iff an H-instance of* A *is a (propositional) tautology.*

tautology になる (H-)instance があれば、$\boldsymbol{G}$ の命題論理に対する完全性と推論図 $(\exists)$ より $\vdash A$.

逆を 2 通りに示す。

初めに semantical proof. H_A を A の Herbrand universe とおく。any H-instance of A is refutable, i.e., any $\bigwedge\{\neg R(\vec{t^i};\vec{a}) : i \leq r\}$ is satisfiable とする。これは the set of propositional formulas $\{\neg R(\vec{t};\vec{a}) : \vec{t} \subseteq H_A\}$ is finitely satisfiable となり、compactness theorem for propositional logic より $\{\neg R(\vec{t};\vec{a}) : \vec{t} \subseteq H_A\}$ を satisfy する truth valuation V を取る。これよりモデル $M = \langle H_A; \cdots\rangle$ を predicate symbol Q について

$$M \models Q(\vec{t}) :\Leftrightarrow V(Q(\vec{t})) = \top$$

で定めると、$M \not\models A$ となるので Soundness で $\not\vdash A$.

次に cut elimination による証明。$\vdash A$ と仮定する。A の cut-free proof P(には quantifier-free を含めて purely existential formulas しかない) を取る。その中のすべての推論図 $(\exists)$ をやめてしまう：

$$\frac{\Gamma, \exists x_j \cdots \exists x_n R(\ldots, t_{j-1}, x_j, \ldots, x_n; \vec{a})}{\Gamma, \exists x_{j-1}\exists x_j \cdots \exists x_n R(\ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n; \vec{a})}\ (\exists)$$

と A の an instance $\{R(\vec{t^i};\vec{a}) : i \leq r\}$ の proof になる。最後に Herbrand universe に入っていない term つまり余計な individual constant, variable, function symbol で始まる term には Herbrand universe 内の term を代入しておけばよい。

後者の証明で cut elimination が Cut-elimination theorem 3.5 によっていたら、できあがる H-instance の size (the number r of disjuncts, sizes of terms in $\vec{t}^i$) が、与えられた A の証明の size の super-exponential function (in Grzegorczyk's $\mathcal{E}^4$) で抑えられることが分かる。

この bound が必要であることは R. Statman[6] により示された。

Theorem 4.2 は purely universal theory T の下でも、purely existential formula A について $T \vdash A$ iff an H-instance of A is provable in T として成立。

例えばそのような T について、$T \vdash \forall x \exists y R(x, y)$ (R: quantifier-free) としたら terms t_i が取れて $T \vdash \bigvee_i \{R(x, t_i(x))\}$ とできる。

4.2 ∃∀-formula

次に ∃∀-formula に対する Herbrand の定理。

Definition 4.3 A を ∃∀-formula とする*:*

$$\begin{array}{rcl} A & \equiv & \exists y_1 \cdots \exists y_E \forall x_1 \cdots \forall x_U \, R(\vec{y}; \vec{x}; \vec{a}) \\ & & (R\text{: quantifier-free}, \vec{a}\text{: parameters}) \end{array}$$

1. A 中の各 universal quantifier $\forall x_m$ について、E-変数の new function symbol f_m *(Herbrand function)* を導入して、universal quantifier $\forall x_m$ を消し、A の matrix 中の変数 x_m を term $f_m(y_1, \ldots, y_E)$ で置き換えれば *Herbrand normal form* A^H が得られる。

2. L_A で A 中の記号（プラス a constant if necessary）を表し、L_H で L_A に Herbrand functions を付け加えた言語とする。

3. A の *H-instance* (L_A-formula) を定義する。

   初めに互いに異なる変数の列の列 $\{\vec{x}_i : i \leq r\}$ ($\vec{x}_i = x_i^1, \ldots, x_i^U$) を取る。次に terms の列の列 $\{\vec{t}_i : i \leq r\}$ ($\vec{t}_i = t_i^1, \ldots, t_i^E$) で次の条件を充たすものを取る：

   変数条件 t_i^j に occur してよい変数は parameters $\vec{a}$ と x_k^m $(k < i)$ だけ。

   このような $\{\vec{x}_i : i \leq r\}$ と $\{\vec{t}_i : i \leq r\}$ を代入した quantifier-free formula in L_A, $\bigvee\{R(\vec{t}_i; \vec{x}_i; \vec{a}) : i \leq r\}$ を A の an H-instance と呼ぶ。

$$\begin{array}{rcl} A & \equiv & \exists y_1 \cdots \exists y_E \forall x_1 \cdots \forall x_U \, R(\vec{y}; \vec{x}; \vec{a}) \\ A^H & \equiv & \exists y_1 \cdots \exists y_E \, R(\vec{y}; \vec{f}(\vec{y}); \vec{a}) \\ A^{H+} & \equiv & \bigvee_i \{R(\vec{t}_i; \vec{f}(\vec{t}_i); \vec{a})\} \, (\vec{f} \text{ may occur in } \vec{t}_i) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
A^+ &\equiv \bigvee\{R(\vec{t_i}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_{i-1};\vec{a});\vec{x}_i;\vec{a}) : i\leq r\}\\
&\equiv R(\vec{t_0}(;\vec{a});\vec{x}_0;\vec{a})\vee R(\vec{t_1}(\vec{x}_0;a);\vec{x}_1;\vec{a})\vee\cdots\\
&\quad \vee R(\vec{t_r}(\vec{x}_0,\ldots,\vec{x}_{r-1};\vec{a});\vec{x}_r;\vec{a})
\end{aligned}
$$

Theorem 4.4 $\exists\forall$-*formula* A について、次は互いに同値：

1. $\vdash A$.
2. $\vdash A^H$.
3. *an H-instance of* A^H *is a tautology.*
4. *an H-instance of* A *is a tautology.*

Proof.
$1 \Rightarrow 2$ は logical に明らか。ついでに $2 \Rightarrow 1$ は semantical には明らか、Skolem function を $\neg A$ のモデルで取ればよい。

$2 \Leftrightarrow 3$ は Theorem 4.2.

$4 \Rightarrow 1$ は推論図 $(\forall), (\exists)$ を添字 $\vec{x}_i, \vec{t_i}$ の大きいほうの quantifier からやって重ねていけばよい。そのとき（変数条件）が要る。

ついでに $4 \Rightarrow 3$ は、変数 x_i^m に term $f_m(t_i^1,\ldots,t_i^E)$ を $i = 0, 1, \ldots, r$ の順に代入していけばよい。例えば $R(t_0;x_0)\vee R(t_1(x_0);x_1)$ はこの結果 $R(t_0;f(t_0))\vee R(t_1(f(t_0));f(t_1(f(t_0))))$ になる。

最後に $3 \Rightarrow 4$ を示す。簡単のため $A \equiv \exists y\forall x R(y;x)$ (parameters $\vec{a}$ 略) として A^H の H-instance で tautology になっている

$$\bigvee_{i\leq r} R(t_i;f(t_i)) \text{ where } t_i \not\equiv t_j \ (i\neq j) \tag{13}$$

を取る。これから適当な順番で Herbrand function f を含んだ terms に fresh variables を代入することで Herbrand function を消去し、A の instance をつくる。このような置き換えで tautology であることは保存される。

初めに (13) 中の term $f(t)$ で $f(t_i)$ という形をしていないもの全部をひとしなみに勝手な term で置き換える。

次に（上で変更された）(13) 中のセミコロンの右側の $(r+1)$ 個の terms $Tm = \{f(t_i) : i \leq r\}$ 全部を考える。必要なら添字を付け替えることにより、Tm は短い順に並んでいるとしてよい：

$$f(t_k) \text{ が } f(t_i) \text{ の subterm なら } i \geq k \tag{14}$$

fresh variables $x_0,\ldots,x_r$ を取っておく。

さて初めに最も長い $f(t_r)$ を変数 x_r で置き換える。これで残りの terms $\{f(t_k) : k < r\}$ は影響を受けない。つまり x_r は残りの terms 中に occur しない。

次に残りの terms で最長な $f(t_{r-1})$ を取り、それを変数 x_{r-1} で置き換える。これでも残りの terms $\{f(t_k) : k < r-1\}$ は影響を受けない。

こうして順々に $f(t_k)$ を変数 x_k で置き換えていき Herbrand function が完全に消去される。

得られた tautology が（変数条件）を充たすことを見る。

t_i^+ を t_i の代入後の姿とする。いま t_i^+ に x_k が occur しているとする。これは $f(t_k)$ が t_i に occur していたということだから、(14) より $k < i$ となる。これで（変数条件）が充たされることが分かった。 $\square$

Exercise(Cf. Beklemishev[1]).

binary predicate symbol $<$ は linear ordering in a purely universal theory T とする。unary function symbol h について

$$T \vdash \exists m \forall n, k \geq m (n \leq k \to h(n) \geq h(k)) \tag{15}$$

となっていたら

$$T + L\Sigma_1^- \vdash \exists m [h(m) = \lim_{n \to \infty} h(n)] (:\leftrightarrow \exists m \forall n \geq m (h(n) = h(m)))$$

axiom schema $L\Sigma_1^-$ は

$$\exists x A(x) \to \exists x [A(x) \land \forall y < x \neg A(y)] \; (\exists x A(x) : \Sigma_1 \text{ sentences})$$

（ヒント）仮定 (15) に Hebrand の定理 4.4 して T で証明できる H-instance をつくる。例えばそれが

$$[x_0 \geq y_0 \geq m_0 \to h(y_0) \geq h(x_0)] \tag{16}$$
$$\lor$$
$$[x_1 \geq y_1 \geq m_1(x_0, y_0) \to h(y_1) \geq h(x_1)] \tag{17}$$

とする。

(16) が任意の x_0, y_0 で成り立っていたら m_0 から先の数列 $\{h(x)\}_{x \geq m_0}$ の最小値 $z_0 = \lim_{n\to\infty} h(n)$. その存在は $L\Sigma_1^-$ より $z_0 = \mu z[\exists x \geq m_0(h(x) = z)]$.

そうでないなら、反例 x_0, y_0 により (17) が任意の x_1, y_1 で成り立ち $\{h(x)\}_{x \geq m_1(x_0,y_0)}$ の最小値 $z_1 = \lim_{n\to\infty} h(n)$.

再び $L\Sigma_1^-$ より z_1 の存在が言える：

$$z_1 = \mu z[\exists x_0, y_0 \exists x \geq m_1(x_0, y_0)(x_0 \geq y_0 \geq m_0 \land h(y_0) < h(x_0) \land h(x) = z)].$$

4.3 Prenex formula

最後に prenex formula に対する Herbrand の定理。

Definition 4.5 A を prenex formula とする。

1. A の *Herbrand normal form* A^H は Skolem normal form の dual として定義される。A 中の各 universal quantifier $\forall x_l$ について、それより前（左）にある existential quantifiers が n_l 個 $\exists x^l_1, \ldots, \exists x^l_{n_l}$ あるとすれば、n_l-変数の new function symbol f_l *(Herbrand function)* を導入して、universal quantifier $\forall x_l$ を消し、A の matrix 中の変数 x_l を term $f_l(x^l_1, \ldots, x^l_{n_l})$ で置き換えれば A^H が得られる。

   A^H は拡張された言語での purely existential formula である。

2. 言語 L_A, L_H の定義は *Definition 4.3* と同じ。

3. A の *H-instance* を定義するために A の matrix を $R(\vec{y}; \vec{x}; \vec{a})$ と表記する。ここで、$\vec{y} = y_1, \ldots, y_E$ は existential quantified な変数で $\vec{x} = x_1, \ldots, x_U$ は universally quantified とし、それぞれ対応する quantifiers $\exists y_j$, $\forall x_m$ はこの順に並んでいる、つまり $\exists y_j$ は $\exists y_{j+1}$ より左にあるとする。

   初めに互いに異なる変数の列の列 $\{\vec{x^i} : i \leq r\}$ $(\vec{x^i} = x^i_1, \ldots, x^i_U)$ を取る。次に terms の列の列 $\{\vec{t^i} : i \leq r\}$ $(\vec{t^i} = t^i_1, \ldots, t^i_E)$ で次の条件を充たすものを取る：

   (a) t^i_j に occur してよい function symbol（含む individual constant）は、元々 A に occur していた L_A 中のものに限る。

   (b) （変数条件）
   変数と terms の集合 $\bigcup\{\vec{x^i} : i \leq r\} \cup \bigcup\{\vec{t^i} : i \leq r\}$ 上の線形順序 $<$ で x^i_m, t^i_j 間は対応する quantifiers 間の順序と compatible なもの、つまり

   $$x^i_m < x^i_{m+1} \,\&\, t^i_j < t^i_{j+1} \tag{18}$$
   $$t^i_j < x^i_m \text{ iff } \exists y_j \text{ は } \forall x_m \text{ の左}$$
   $$x^i_m < t^i_j \text{ iff } \forall x_m \text{ は } \exists y_j \text{ の左}$$

   を充たすものがあり、それに関して t^i_j に occur してよい変数は parameters $\vec{a}$ と $x^k_m < t^i_j$ だけとする。

   このような $\{\vec{x^i} : i \leq r\}$ と $\{\vec{t^i} : i \leq r\}$ を代入した quantifier-free formula in L_A, $\bigvee\{R(\vec{t^i}; \vec{x^i}; \vec{a}) : i \leq r\}$ を A の an H-instance と呼ぶ。

Exercise. 上記の（変数条件）を満たす線形順序が存在するためには、関係 $<$ を (18) が成立するか、または x^k_m が t^i_j に occur すれば $x^k_m < t^i_j$ で定義したとき、これが acyclic になる (i.e., its transitive closure is irreflexive) ことと同値である。

例えば $A \equiv \exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 R(y_1, y_2; x_1, x_2; a)$ の場合を考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 R(y_1, y_2; x_1, x_2; a) \\
A^H &\equiv \exists y_1 \exists y_2 R(y_1, y_2; f_1(y_1), f_2(y_1, y_2); a) \\
A^{H+} &\equiv \bigvee_i \{R(t_1^i, t_2^i; f_1(t_1^i), f_2(t_1^i, t_2^i); a)\}\,(f_1, f_2 \text{ may occur in } t_1^i, t_2^i)
\end{aligned}
$$

そして A の instance は順序が blocks $t_1^i < x_1^i < t_2^i < x_2^i$ の i の大小順であるとして

$$\bigvee\{R(t_1^i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_1^{i-1}, x_2^{i-1};\,;a), t_2^i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_1^{i-1}, x_2^{i-1}; x_1^i; a); x_1^i, x_2^i; a) : i \leq r\}$$

つまり

$$R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(x_1^0;\,;a); x_1^0, x_2^0; a) \vee R(t_1^1(x_1^0, x_2^0;\,;a), t_2^1(x_1^0, x_2^0; x_1^1; a); x_1^1, x_2^1; a) \vee \cdots$$

それ以外の instance としては $t_1^0 < x_1^0 < t_1^1 < x_1^1 < t_2^0 < x_2^0 < t_2^1 < x_2^1$ として

$$R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(x_1^0; x_1^1; a); x_1^0, x_2^0; a) \vee R(t_1^1(x_1^0;\,;a), t_2^1(x_1^0, x_2^0; x_1^1; a); x_1^1, x_2^1; a)$$

なんてのもある。

Theorem 4.6 *prenex formula A* について、次は互いに同値：

1. $\vdash A$.
2. $\vdash A^H$.
3. *an H-instance of A^H is a tautology.*
4. *an H-instance of A is a tautology.*

Proof.

4 ⇒ 1 は推論図 $(\forall), (\exists)$ を順序 $<$ の大きいほうの quantifier からやって重ねていけばよい。そのとき（変数条件）が要る。例えば block order なら

$$
\begin{array}{cl}
R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(;x_1^0;a); x_1^0, x_2^0; a), R(t_1^1(x_1^0, x_2^0;\,;a), t_2^1(x_1^0, x_2^0; x_1^1; a); x_1^1, x_2^1; a) & \\
\hline
R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(;x_1^0;a); x_1^0, x_2^0; a), \forall x_2^1 R(t_1^1(x_1^0, x_2^0;\,;a), t_2^1(x_1^0, x_2^0; x_1^1; a); x_1^1, x_2^1; a) & (\forall) \\
\hline
R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(;x_1^0;a); x_1^0, x_2^0; a), \exists y_2 \forall x_2^1 R(t_1^1(x_1^0, x_2^0;\,;a), y_2; x_1^1, x_2^1; a) & (\exists) \\
\hline
R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(;x_1^0;a); x_1^0, x_2^0; a), \forall x_1^1 \exists y_2 \forall x_2^1 R(t_1^1(x_1^0, x_2^0;\,;a), y_2; x_1^1, x_2^1; a) & (\forall) \\
\hline
R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(;x_1^0;a); x_1^0, x_2^0; a), A & (\exists) \\
\hline
\forall x_2^0 R(t_1^0(;\,;a), t_2^0(;x_1^0;a); x_1^0, x_2^0; a), A & (\forall) \\
\hline
\exists y_2 \forall x_2^0 R(t_1^0(;\,;a), y_2; x_1^0, x_2^0; a), A & (\exists) \\
\hline
\forall x_1^0 \exists y_2 \forall x_2^0 R(t_1^0(;\,;a), y_2; x_1^0, x_2^0; a), A & (\forall) \\
\hline
A & (\exists)
\end{array}
$$

ついでに $4 \Rightarrow 3$ は、変数 x_l^i に term $f_l(t_1^i, \ldots, t_{n_l}^i)$ を $i = 0, 1, \ldots, r$ の順に代入していけばよい。

最後に $3 \Rightarrow 4$ を示す。簡単のため $A \equiv \exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 R(y_1, y_2; x_1, x_2)$ (parameter a 略) として A^H の H-instance で tautology になっている

$$\bigvee_{i \leq r} \{R(t_1^i, t_2^i; f_1(t_1^i), f_2(t_1^i, t_2^i))\} \tag{19}$$

を取る。これから適当な順番で Herbrand functions f_1, f_2 を含んだ terms に fresh variables を代入することで Herbrand functions を消去し、A の instance をつくる。このような置き換えで tautology であることは保存される。

初めに (19) 中の term $f_1(t), f_2(t, s)$ で $f_1(t_1^i), f_2(t_1^i, t_2^i)$ という形をしていないもの全部をひとしなみに勝手な term で置き換える。

次に（上で変更された）(19) 中のセミコロンの右側の $(2(r+1) \geq) r_0$ 個の terms $Tm = \{f_1(t_1^i), f_2(t_1^i, t_2^i) : i \leq r\}$ 全部を考える。それらを長さ（＝記号数）の順に短いのを先にして一列に並べる: $Tm = s_1 < s_2 < \cdots < s_{r_0}$.

この順序で $f_1(t_1^i) < f_2(t_1^i, t_2^i)$, また $t < s$ なら s は t の subterm になっていない。従って $t \equiv f_1(t_1^i), f_2(t_1^i, t_2^i)$ として s は t の subterm である t_1^i もしくは t_1^i, t_2^i の subterm でもない。

fresh variables $x_1, \ldots, x_{r_0}$ を取っておく。

さて初めに最も長い s_{r_0} を取る（それは $f_2(t_1^r, t_2^r)$ だと思ってよい）。s_{r_0} を変数 $x_{r_0} (\equiv x_2^r)$ で置き換える。これで残りの terms $\{s_k : 1 \leq k < r_0\}$ は影響を受けない。つまり x_{r_0} は残りの terms 中に occur しない。次に残りの terms で最長な $s_{r_0 - 1}$ を取り、それを変数 $x_{r_0 - 1}$ で置き換える。これでも残りの terms $\{s_k : 1 \leq k < r_0 - 1\}$ は影響を受けない。

こうして順々に s_k を変数 x_k で置き換えていき Herbrand functions が完全に消去される。すると $j < k$ として x_k は s_j に occur しない。特に例えば $s_j \equiv f_2(t_1^i, t_2^i)$ なら、x_k は t_1^i, t_2^i に occur しない。

得られた tautology が（変数条件）を充たすことを見る。変数と terms 間の順序を次のように定める。まず $x_k < x_j$ iff $s_k < s_j$ iff $k < j$ とする。t_j^{i+} を t_j^i の代入後の姿とする。$j = 1$ なら $f_1(t_1^i) \equiv s_k$ として、t_j^{i+} を x_k の直前と定める。また $j = 2$ なら $f_2(t_1^i, t_2^i) \equiv s_k$ として、t_j^{i+} を x_k の直前と定める。

変数の添字を付け替えて $f_1(t_1^i), f_2(t_1^i, t_2^i)$ は x_1^i, x_2^i で置き換わるとすれば、$f_1(t_1^i) < f_2(t_1^i, t_2^i)$ だったので $t_1^{i+} < x_1^i < t_2^{i+} < x_2^i$ となる。

いま t_j^{i+} に x_k が occur しているとする。t_j^{i+} の直後の元を $x_m \equiv x_j^i$ とする。t_j^i は s_m の subterm である。さっき注意したように s_k は $m < k$ なる s_m の subterm ではないので、その代理 x_k は s_m に、従って t_j^{i+} に occur しない。よって $m \geq k$ であるが t_j^i は s_m の subterm であるので $m \neq k$, i.e., $m > k$ となり、t_j^{i+} は x_m の直前なので $x_k < t_j^{i+}$. これで（変数条件）が充たされることが分かった。 □

A super-exponential speed-up in cut elimination(Orevkov)

Orevkov は Statman の結果 [6]（のみ）知って、cut elimination において super-exponential speed-up があることを示した。その idea は Gentzen の PA vs. ε_0 の証明を拝借したもので、Gentzen の finitary version といったところ。

A.1 Lowerbounds on cut-free derivations in the predicate logic

言語 $\mathcal{L} = \{0, S, f, =, \neq, N, \bar{N}\}$ を考える。ここで 0 is an individual constant, S a unary function, f a binary one and N a unary predicate. $N(x)$ を $x \in N$, $\bar{N}(x)$ を $x \notin N$, $S(x)$ を Sx とそれぞれ書く。

$$\mathrm{Hyp}_N = \{0 \in N, \forall x \in N(Sx \in N), \forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N]\}$$

とし Hyp は equality axioms (= is a congruence relation) for the language $\{0, S, f\}$ と次の universal closures からなる集合とする：

$$\begin{cases} f(y, 0) = Sy \\ f(y, Sx) = f(f(y, x), x) \end{cases} \tag{20}$$

Hyp は N-free であることに注意。

$\mathrm{Hyp}^+ := \mathrm{Hyp}_N \cup \mathrm{Hyp}$ とし $\neg\mathrm{Hyp}^+ = \{\neg A : A \in \mathrm{Hyp}^+\}$.

Hyp^+ の intended model は model $\boldsymbol{N}_\omega$ で、その universe は ω, そこで N は $\boldsymbol{N}_\omega := \omega$ と解釈され 0 は zero, $Sx = x + 1$ で $f(y, x) = y + 2^x$. 特に $f(0, x) = 2^x$.

自然数 k について帰納的に terms $f^{(k)}(y)$ を $f^{(0)}(y) :\equiv y$, $f^{(k+1)}(y) :\equiv f(y, f^{(k)}(y))$ と定める。また val(t) は value (numeral) of closed terms t in the model $\boldsymbol{N}_\omega$ のこと。例えば $\mathrm{val}(f^{(k)}(0)) = 2_k(0)$.

容易に分かるように $\boldsymbol{G} \vdash \neg\mathrm{Hyp}^+, t = \mathrm{val}(t)$ なので $\boldsymbol{G} \vdash \neg\mathrm{Hyp}^+, t \in N$ for any closed term t.

Exercise. Show the assertion on the computability: By induction on the length of closed terms it suffices to show the terms $f(n, m)$ are computable for any numerals n, m (by using axioms Hyp^+). Show the computability of $f(n, m)$ (for any n) by induction on m.

ここでは no elementary recursive function bounds the depths of the cut-free derivations of the sequents $\neg\mathrm{Hyp}^+, f^{(k)}(0) \in N$ を示す。

Theorem A.1 (Orevkov [5])

$$\boldsymbol{G} \vdash_0^n \neg\mathrm{Hyp}^+, f^{(k)}(0) \in N \Rightarrow n \geq 2_{k-5}(0) - 6$$

for $k \geq 5$*.*

Hence no elementary recursive function bounds the function $F(k) := \min\{n \in \omega : \boldsymbol{G} \vdash_0^n \neg\mathrm{Hyp}^+, f^{(k)}(0) \in N\}$*. Namely* $\forall c \exists k[F(k) > 2_c(k+c)]$*.*

Hyp_N を対応する inference rules で置き換える。初めに axiom(=inference rule with null uppersequents)

$$(\mathrm{zero})\ \Gamma, 0 \in N$$

それから two new inference rules (S) and (eq_N): for any terms t, s

$$\frac{\Gamma, t \in N, S(t) \in N}{\Gamma, S(t) \in N}\ (S)\ ;\ \frac{\Gamma, s = t \quad \Gamma, t \in N}{\Gamma, s \in N}\ (eq_N)$$

provability in the extended calculus を $(N) \vdash_c^\alpha \Gamma$ と書く。$(N) \vdash_0^3 \forall x \in N(Sx \in N)$ は簡単：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \notin N, x \in N}{x \notin N, S(x) \in N}\ (S)}{x \notin N \lor S(x) \in N}\ (\lor)}{\forall x \in N(Sx \in N)}\ (\forall)$$

$(N) \vdash_0^5 \forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N]$ も：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \neq b, a = b \quad b \notin N, b \in N}{a \neq b, b \notin N, a \in N}\ (eq_N)}{(N) \vdash_0^3 a = b \land b \in N \to a \in N]}\ (\lor)}{(N) \vdash_0^4 \forall y[a = y \land y \in N \to a \in N}\ (\forall)}{(N) \vdash_0^5 \forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N]}\ (\forall)$$

$\boldsymbol{G} \vdash_0^n 0 \notin N, \neg\forall x \in N(Sx \in N), \neg\forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N], \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N$

とする。ここで $\neg\mathrm{Hyp}^+ = \neg\mathrm{Hyp}_N \cup \neg\mathrm{Hyp}$ で $\neg\mathrm{Hyp}_N = \{0 \notin N, \neg\forall x \in N(Sx \in N), \neg\forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N]\}$ であった。cut して $(N) \vdash_5^{n+6} \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N$:

$$\dfrac{(N) \vdash_0^3 \forall x \in N(Sx \in N) \quad \dfrac{(N) \vdash_0^0 0 \in N \quad \boldsymbol{G} \vdash_0^n 0 \notin N, \neg\forall x \in N(Sx \in N), \neg\forall x\forall y[x = y \land y \in N \to x \in N], \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N}{(N) \vdash_1^{n+1} \neg\forall x \in N(Sx \in N), \neg\forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N], \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N}\ (cut)}{(N) \vdash_3^{n+4} \neg\forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N], \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N}\ (cut)$$

$$\dfrac{(N) \vdash_0^5 \forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N] \quad (N) \vdash_3^{n+4} \neg\forall x \forall y[x = y \land y \in N \to x \in N], \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N}{(N) \vdash_5^{n+6} \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N}\ (cut)$$

with $\mathrm{dg}(0 \in N) = 0$, $\mathrm{dg}(\forall x \in N(Sx \in N)) = 2$ and $\mathrm{dg}(\forall x \forall y[x = y \wedge y \in N \to x \in N]) = 4$.

$t \notin N$ がいかなる inference の principal formula でもないので、calculus (N) で cut-elimination theorem が成立, cf. Anchored cut elimination 3.6: $(N) \vdash^n_c \Gamma \Rightarrow (N) \vdash^{2_c(n)}_0 \Gamma$ for $c < \omega$. よって $(N) \vdash^{2_5(n+6)}_0 \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N$.

Exercise. Verify the cut-elimination theorem for the calculus (N).

Definition A.2 *1.* $\bar{N}$ が occur しない formula は *N-positive* と呼ばれる。N-positive formulas ばかりから成る sequent も *N-positive* と呼ばれる。

2. 正整数 k について $\boldsymbol{N}_k$ で、predicate N を $\boldsymbol{N}_k := \{n \in \omega : n < k\}$ と解釈する $\mathcal{L}$-model を表す。それ以外の記号の解釈は $\boldsymbol{N}_\omega$ でのと同じ。

容易に分かるように

Lemma A.3 (Monotonicity lemma for N-positive sequents)
N-positive sequent Δ と $k \geq m$ とする。*free variables* へのある *assignment* の下で Δ が $\boldsymbol{N}_m$ で成立すれば、$\boldsymbol{N}_k$ でも成立。

Lemma A.4 *N-positive sequent* Δ について

$$(N) \vdash^k_0 \Delta \Rightarrow \boldsymbol{N}_{1+k} \models \Delta$$

Proof by induction on k.

初めに Δ が axiom in (N) のとき。Δ が logical axiom $\Gamma, \bar{L}, L$ なら何も示すことは無い。Δ を axiom (zero) $\Gamma, 0 \in N$ とせよ。$0 \in \boldsymbol{N}_{1+k}$ なので $\boldsymbol{N}_{1+k} \models 0 \in N$.

次に Δ が lowersequent of an inference other than (cut) とする。その uppersequents は N-positive であるから IH により、その inference は (S) としてよい: $m < k$

$$\frac{(N) \vdash^m_0 \Gamma, t \in N, S(t) \in N}{(N) \vdash^k_0 (\Delta =)\Gamma, S(t) \in N}\ (S)$$

free variables へのある assignment の下で IH より Γ, $t \in N$, $S(t) \in N$ のいずれかが $\boldsymbol{N}_m$ で成立。Monotonicity lemma A.3 より、それは $t \in N$ としてよい。すると $k > m$ だから $S(t) \in N$ が $\boldsymbol{N}_k$ で成立。 □

従って $(N) \vdash^{2_5(n+6)}_0 \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N$ より $\boldsymbol{N}_{1+2_5(n+6)} \models \neg\mathrm{Hyp}, f^{(k)}(0) \in N$ となる。どんな m についても $\boldsymbol{N}_m \models \mathrm{Hyp}$ なので、これは $f^{(k)}(0) < 1+2_5(n+6)$ を、つまり $2_k(0) \leq 2_5(n+6)$ を意味する。よって $2_{k-5}(0) - 6 \leq n$

for $k \geq 5$.

Remark. g を関数 $g(x) = 2_x(0)$, i.e., $g(0) = 0$ and $g(Sx) = f(0, g(x))$ とする。容易に分かるように $\boldsymbol{G} \not\vdash \neg\mathrm{Hyp}^{++}, g(0) \neq 0, \neg\forall x[g(Sx) = f(0, g(x))], \forall x \in N[g(x) \in N]$. ここで Hyp^{++} は union of Hyp^{+} and the equality axiom for the function symbol g のこと。

A.2 Short proofs of $\mathrm{Hyp}^{+} \to f^{(k)}(0) \in N$ using cut rules

ここでは subsection A.1 の sequent Hyp^{+} について

Theorem A.5 (Orevkov [5])
There are proofs of $\neg\mathrm{Hyp}^{+}, f^{(k)}(0) \in N$ *in the predicate logic* $\boldsymbol{G} + (cut)$ *of linear depths:* $\forall k\{\boldsymbol{G} + (cut) \vdash^{ck+c} \neg\mathrm{Hyp}^{+}, f^{(k)}(0) \in N\}$ *for a constant* c.

Proof Argue in the predicate logic $\boldsymbol{G} + (cut)$.
formulas $A_n(x)$ 帰納的に：

$$A_0(x) :\equiv x \in N \text{ and}$$
$$A_{n+1}(x) :\equiv \forall y[A_n(y) \to A_n(f(y, x))] \tag{21}$$

induction on n で容易に

$$\exists e \forall n\{\boldsymbol{G} + (cut) \vdash^{en+e} \neg\mathrm{Hyp}^{+}, \forall x \forall y[x = y \land A_n(y) \to A_n(x)]\} \tag{22}$$

Claim A.6 $\exists d \forall n\{\boldsymbol{G} + (cut) \vdash^{dn+d} \neg\mathrm{Hyp}^{+}, A_n(0)\}$.

Proof of Claim A.6.
Case0 $n = 0$: このとき $A_0(0) \equiv 0 \in N$ で $0 \in N$ is in the hypothesis Hyp^{+}.
Case1 $n = 1$: Hyp^{+} と $y \in N$ と仮定する。f の定義 (20) より $f(y, 0) = Sy$. 仮定 Hyp^{+} から $Sy \in N$.
Case 2 $n > 1$: $A_{n-1}(y)$ を仮定する。(22) より $A_{n-1}(Sy)$ を示したい。そこでさらに $A_{n-2}(z)$ を仮定して $A_{n-2}(f(z, Sy))$ を示そう, cf. (21).

$A_{n-1}(y) \leftrightarrow \forall w[A_{n-2}(w) \to A_{n-2}(f(w, y))]$ であり $A_{n-2}(z)$ としているから $A_{n-2}(f(z, y))$, よって $f(z, Sy) = f(f(z, y), y)$ により $A_{n-2}(f(f(z, y), y))$. (22) を使って $A_{n-2}(f(z, Sy))$.

これで Claim A.6 が証明された。 □

さて $\boldsymbol{G} + (cut) \vdash \neg\mathrm{Hyp}^{+}, A_0(f^{(k)}(0))$ by proofs linear in k を示そう。Hyp^{+} を仮定して $k = n + m$ とする。$A_n(f^{(m)}(0))$ を induction on $m \leq k$ で示す。

Claim A.6 から case $m = 0$ が分かる。$m > 0$ として $f^{(m)}(0) \equiv f(0, f^{(m-1)}(0))$. 従って $A_n(f^{(m)}(0))$ が (21), IH $A_{n+1}(f^{(m-1)}(0))$ and $A_n(0)$ から従う。 □

Theorems A.1 and A.5 yield the

Theorem A.7 (Non-elementary speed up of the predicate logic over the cut-free calculus)
There is no elementary recursive function E such that

$$\forall\Gamma\forall n\forall c[\boldsymbol{G} + (cut) \vdash^n_c \Gamma \Rightarrow \boldsymbol{G} \vdash^{E(n,c)}_0 \Gamma].$$

参考文献

[1] L. D. Beklemishev and A. Visser, On the limit existence principles in elementary arithmetic and Σ^0_n-consequences of theories, Ann. Pure Appl. Logic 136(2005), 56-74.

[2] S. Buss, An Introduction to Proof Theory, in:S. R. Buss, ed. Handbook of Proof Theory, North-Holland, 1998, pp.1-78 .

[3] G. Kreisel and A. Lévy, Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, Z. Math. Logik Grundlagen Math., 14, 1968, 97-142

[4] G. Kreisel, G. Mints and S. G. Simpson, The use of abstarct language in elementary mathematics: some pedagogic examples, LNM 453 (1975), 38-131.

[5] V. P. Orevkov, Lower bounds for the lengtheing of proofs after cut-elimination (Russian), Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskago Otdeleniya Ordena Lenina Mathematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI), 88(1979), 137-162, 242-243. Traslated in Journal of Soviet Mathematics, 20(1982), 2337-2350.

[6] R. Statman, Lower bounds on Herbrand's theorem, Proc. AMS, 75 (1979), 104-107.

[7] A. S. Troelstra and H. Schwichtenberg, Basic Proof Theory, second edition, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 43, 2000, Cambridge UP.